离散数学作业 4

第 1 题

在整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义三个关系：

$$xR_1y \iff x = y, \qquad xR_2y \iff 3 \mid (x+y), \qquad xR_3y \iff x \le y.$$

分别判断它们是否具有自反性、对称性、反对称性和传递性。成立的给出简要理由，不成立的给出反例。

第 2 题

用 $r(R)$ 和 $s(R)$ 分别表示关系 R 的自反闭包和对称闭包。

(1) 设 $A = \{1,2,3\}$，$R = \{(1,2),(2,2),(3,1)\}$，求 $r(R)$ 和 $s(R)$。

(2) 对任意集合 B 上的关系 T，证明 $r(s(T)) = s(r(T))$。

第 3 题

设 R 是集合 A 上的关系，R^{-1} 为其逆关系，R^n 表示 R 的 n 次复合。证明：

(1) R 传递，当且仅当 R^{-1} 传递。

(2) 若 R 对称，则对所有正整数 n，R^n 也对称。

第 4 题

设 R 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系，其关系矩阵如下，行列均按 $1, 2, 3, 4$ 排列：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

使用 Warshall 算法求 R 的传递闭包。以 $W^{(0)} = M_R$ 为初始矩阵，按 $1, 2, 3, 4$ 的顺序依次引入中间顶点，写出每轮得到的矩阵 $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}, W^{(4)}$。

第 5 题

在整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 R:

$$aRb \iff 5 \mid (a-b).$$

证明 R 是等价关系，并写出它的所有不同等价类以及商集 $\mathbb{Z}/R$。

第 6 题

设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，A 的一个划分为

$$\pi = \big\{\{1,4\},\{2,5,7\},\{3,6,8\}\big\}.$$

求 A 上的等价关系 R，使得 $A/R=\pi$，并说明这样的 R 是否唯一。

第 7 题

设 R, S 是非空集合 A 上的等价关系。下列关系是否一定为等价关系？若是，给出证明；否则，给出反例。

(1) $R \cap S$。

(2) $R \cup S$。

第 8 题

设 $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$，在 A 上按整除关系定义偏序：

$$a \preceq b \iff a \mid b.$$

画出该偏序集的 Hasse 图，并写出它的覆盖关系（以 (a, b) 表示 b 覆盖 a）。

第 9 题

设

$$\mathcal{F} = \big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}\big\}.$$

对偏序集 $(\mathcal{F},\subseteq)$，回答下列问题，并说明理由。

(1) 求所有极小元和极大元。是否存在最小元和最大元?

(2) 求 $\big\{\{1\},\{3\}\big\}$ 在 $\mathcal{F}$ 中的所有上界，以及最小上界（若存在)。

(3) 求 $\big\{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\big\}$ 在 $\mathcal{F}$ 中的所有下界，以及最大下界（若存在)。

第 10 题

设 L 为所有元素取自 $\{0,1,2\}$ 的 2×2 矩阵构成的集合，在 L 上定义偏序

$$M \preceq N \iff m_{ij} \le n_{ij} \quad (1 \le i,j \le 2),$$

其中 m_{ij}, n_{ij} 分别为 M, N 的对应元素，$\le$ 为数值上的小于等于。

$(L,\preceq)$ 是否为格? 若是，给出任意 $M,N \in L$ 的交 $M \wedge N$ 和并 $M \vee N$，并证明；否则，给出反例。