离散数学作业 3

第 1 题

证明有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是可数的。

第 2 题

希尔伯特大饭店有可数无限多个房间，并且已全部住满。说明在不赶走原有客人的情况下，如何分别安排下列新客人入住：

(1) 有限多个新客人。

(2) 可数无限多个新客人。

(3) 可数无限多群、每群又包含可数无限多个新客人。

第 3 题

分别给出两个不可数集合 A 和 B 的例子，使得 $A \cap B$ 是：

(1) 有限集。

(2) 可数无限集。

(3) 不可数集。

说明各例为何满足要求。

第 4 题

设 $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$，$\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 为正整数集的幂集，

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N}^+ \mid A \text{ 是无限集}\}.$$

利用 Bernstein 定理证明 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ 等势，明确构造两个方向的单射，并说明它们为何是单射。

第 5 题

设 a, b, c, d 均为正整数，判断下列命题是否为真。若为真，给出证明；否则，给出反例。

(1) 若 $a \mid c$，$b \mid c$，则 $ab \mid c$。

(2) 若 $a \mid c$，$b \mid d$，则 $ab \mid cd$。

(3) 若 $ab \mid c$，则 $a \mid c$。

(4) 若 $a \mid bc$，则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$。

第 6 题

计算下列各式，并写出计算过程：

(1) $23300 \bmod 11$。

(2) $2^{3300} \bmod 31$。

(3) $3^{516} \bmod 7$。

第 7 题

证明：对于任意整数 n，

(1) $6 \mid n(n+1)(n+2)$。

(2) $\dfrac{1}{5}n^5 + \dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{7}{15}n$ 是整数。

第 8 题

利用中国剩余定理求下列同余方程组的所有整数解，写出求解过程：

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7, \\ x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

第 9 题

设 $P(n)$ 是命题 $n! < n^n$，其中 n 是大于 1 的整数。用数学归纳法证明 $P(n)$ 对所有整数 $n \geq 2$ 成立，明确写出以下内容：

(1) $P(2)$ 的具体形式及其证明。

(2) 归纳假设，以及归纳步骤中需要证明的命题。

(3) 归纳步骤的证明，并说明如何得到结论。

第 10 题

递归定义双斐波那契数列：

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = 1, \qquad D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

证明：

(1) 用强归纳法证明所有双斐波那契数都是奇数。

(2) 任何两个相邻的双斐波那契数都互质。

第 11 题

用数学归纳法证明：对于任意非负整数 n，存在非负整数 a, b，使得

$$5^n = a^2 + b^2.$$

提示：展开 $(2a - b)^2 + (a + 2b)^2$。

第 12 题

设 a 为非负整数，b 为正整数，函数 Q 递归定义如下：

$$Q(a, b) = \begin{cases} 0, & a < b, \\ Q(a - b, b) + 1, & a \geq b. \end{cases}$$

(1) 计算 $Q(2, 5)$ 和 $Q(12, 5)$。

(2) 说明递归为何必定终止。给出 $Q(a, b)$ 的一般表达式，并用归纳法证明。

(3) 根据上述结论计算 $Q(5861, 7)$。